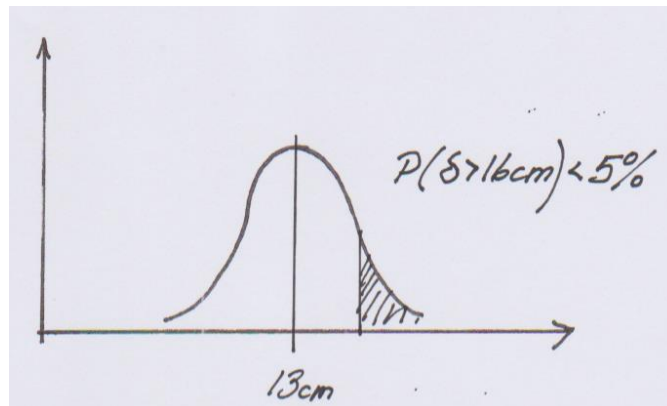
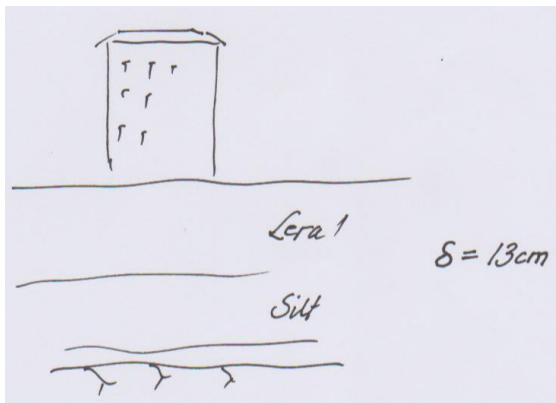


*Kort-kurs i Statistik
för geotekniker*

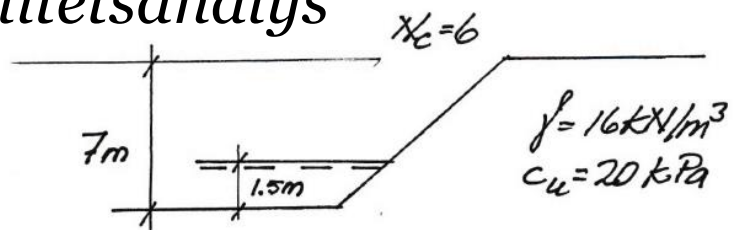
11/3, dagen innan GD

Vad skall vi åstadkomma idag?

Sättningsberäkning

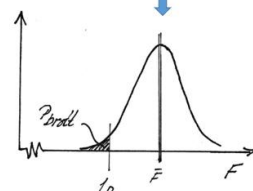
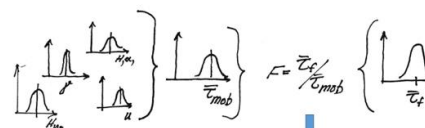


Stabilitetsanalys



$$F = N_c \frac{c_u}{\gamma \cdot H - \gamma_w \cdot t/w}$$

$$F = 6 \cdot \frac{20}{16 \cdot 7 - 10 \cdot 1.5} = 1,24 \quad P(\text{brott})?$$



Förstärkning som ökar F med 10 %,
Minskar $P(\text{brott})$ från $2 \cdot 10^{-3}$ till $1,5 \cdot 10^{-5}$

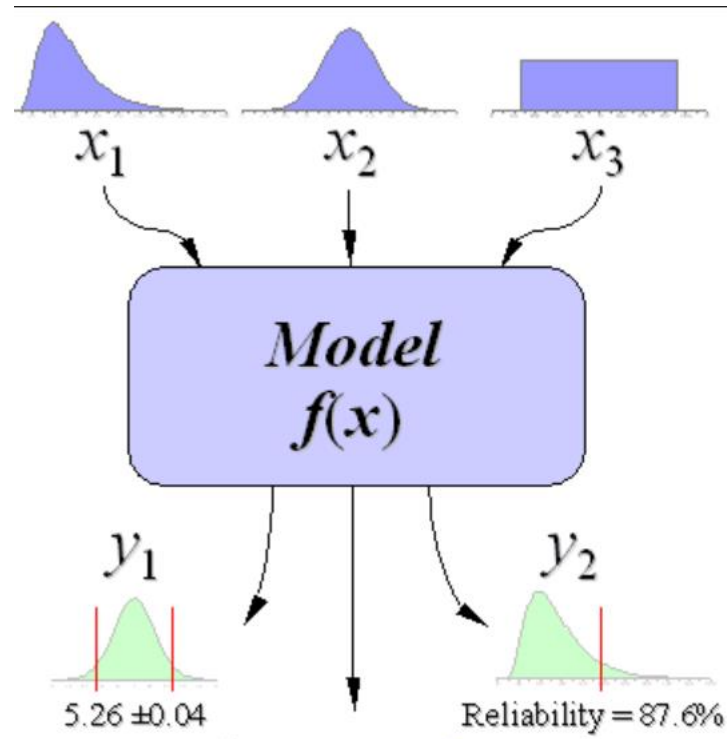
Fördjupade undersökningar som minskar $V_{ip}(c_u)$ från 15 % till 8 % resulterar i att $P(\text{brott})$ minskar från $2 \cdot 10^{-3}$ till $3 \cdot 10^{-6}$

Hur skall det gå till?

Monte Carlo simulering
Punktskattningsmetoden (PEM)

Variationskoefficienter
Variansreduktion

Monte Carlo simulering (John von Neuman)

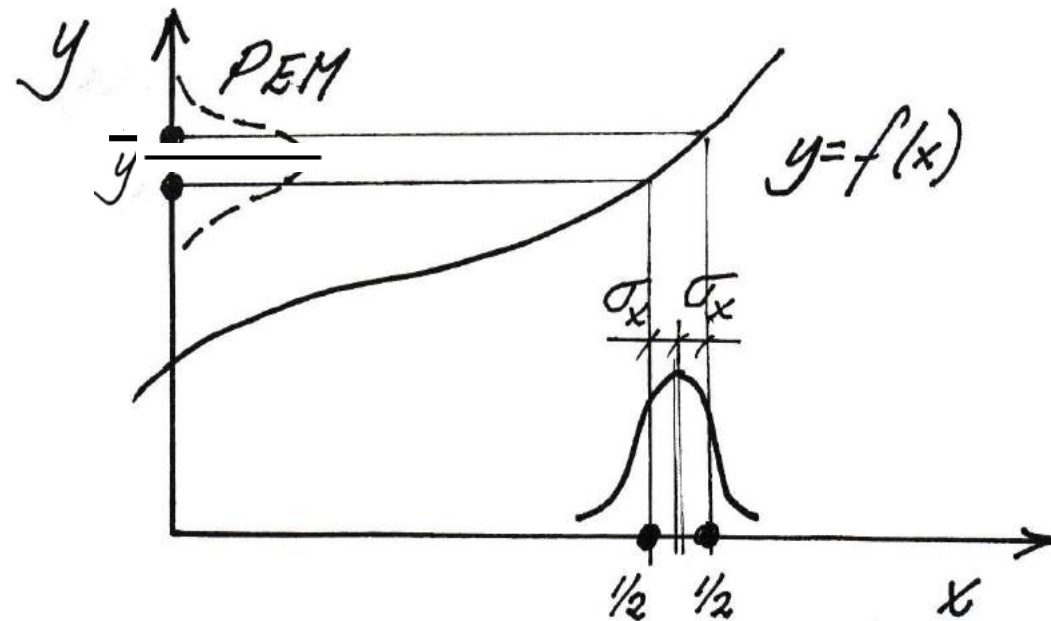


Crystal Ball

@Risk

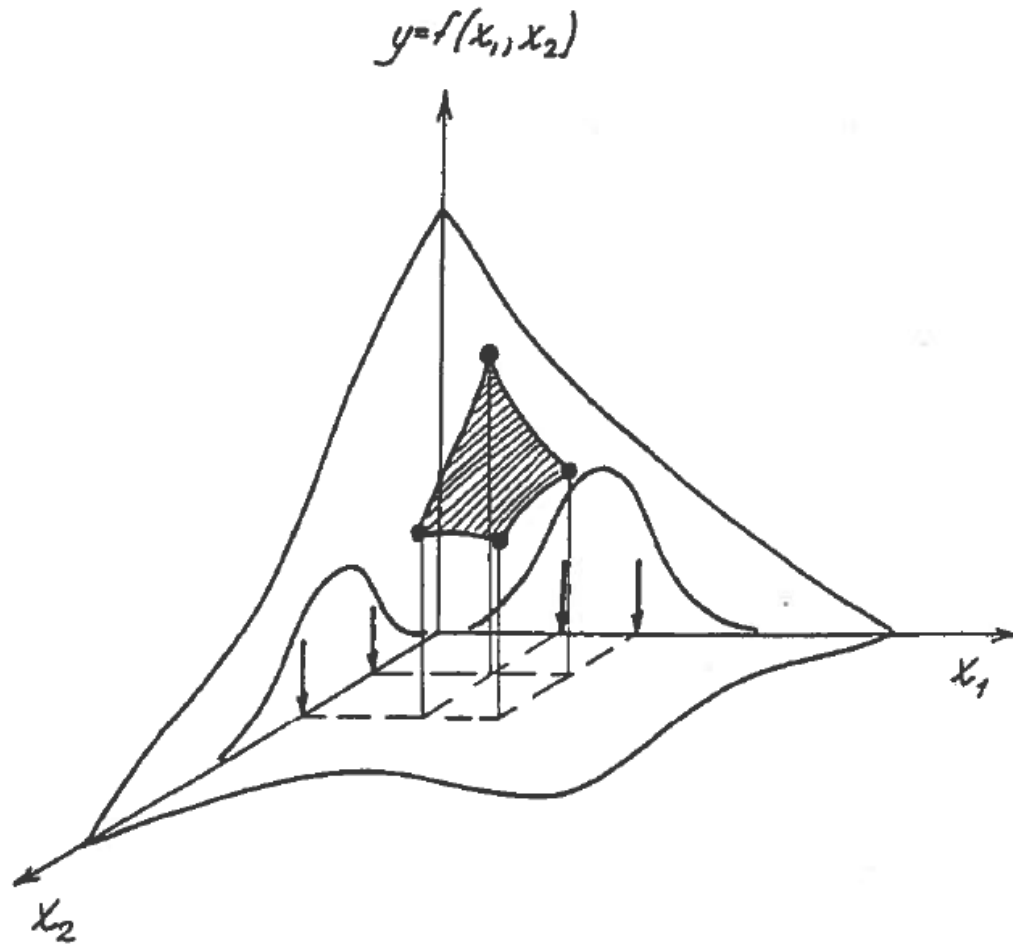
.....

PEM (Point Estimate Method) Punktskattningsmetoden



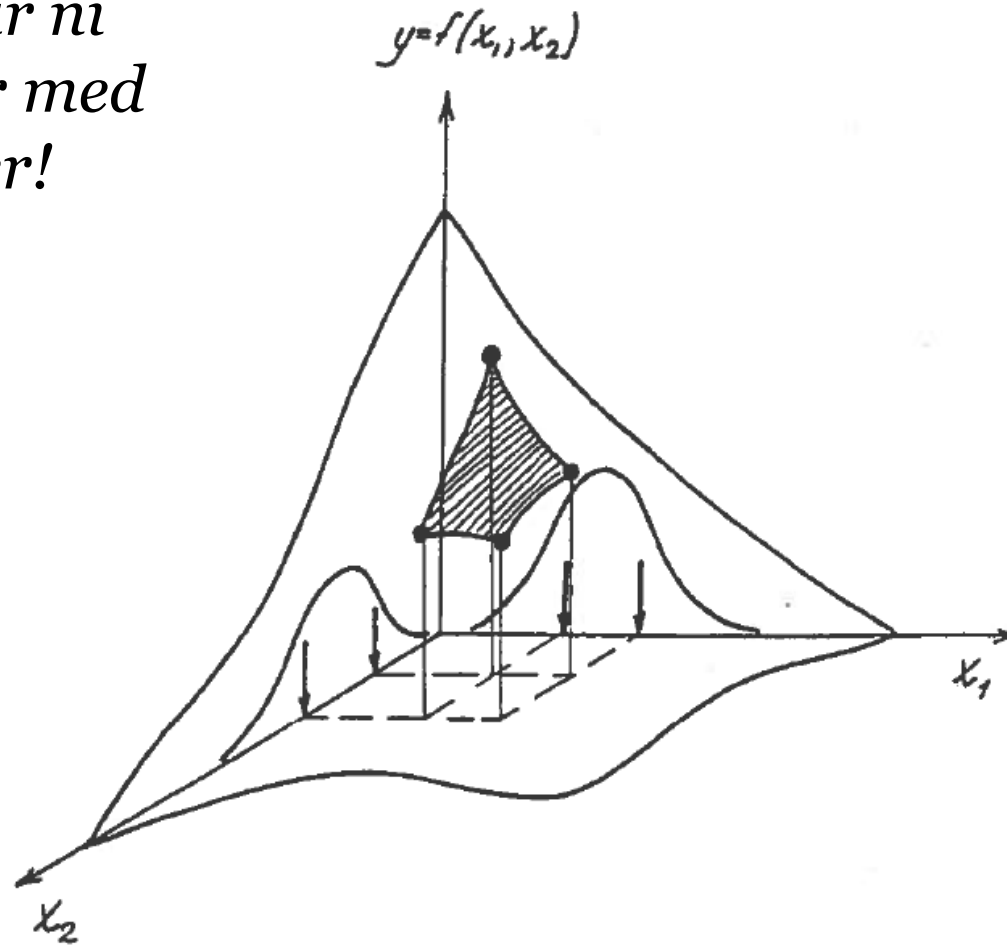
$$\sigma_x = \left(E[x^2] - (E[x])^2 \right)^{0.5}$$

$$\sigma_x = \left(E[x^2] - (E[x])^2 \right)^{0.5}$$



Antal variabler = n medför 2^n beräkningar

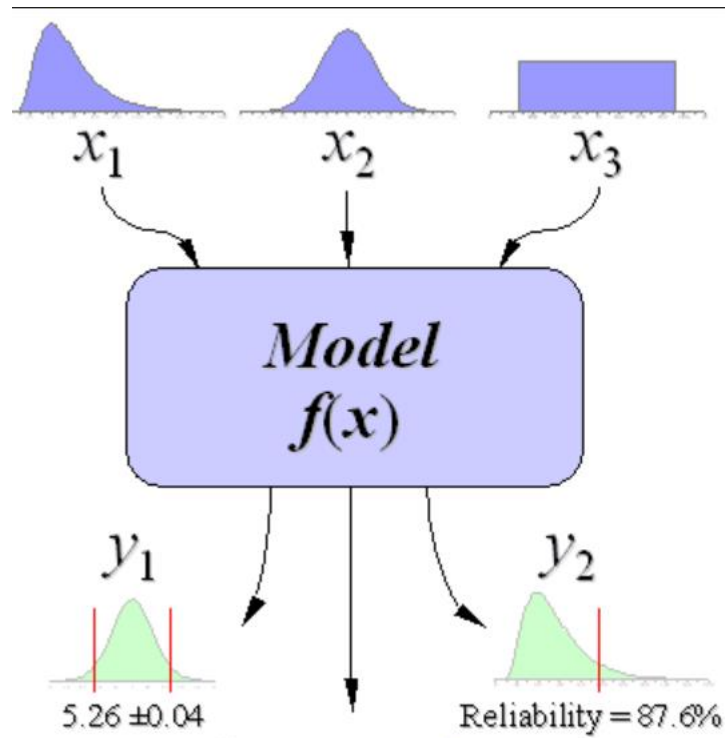
Bonus! Ni får en Excel-fil där ni kan göra egna simuleringar med PEM med upp till 4 variabler!



$$\sigma_x = \left(E[x^2] - (E[x])^2 \right)^{0.5}$$

Antal variabler = n medför 2^n beräkningar

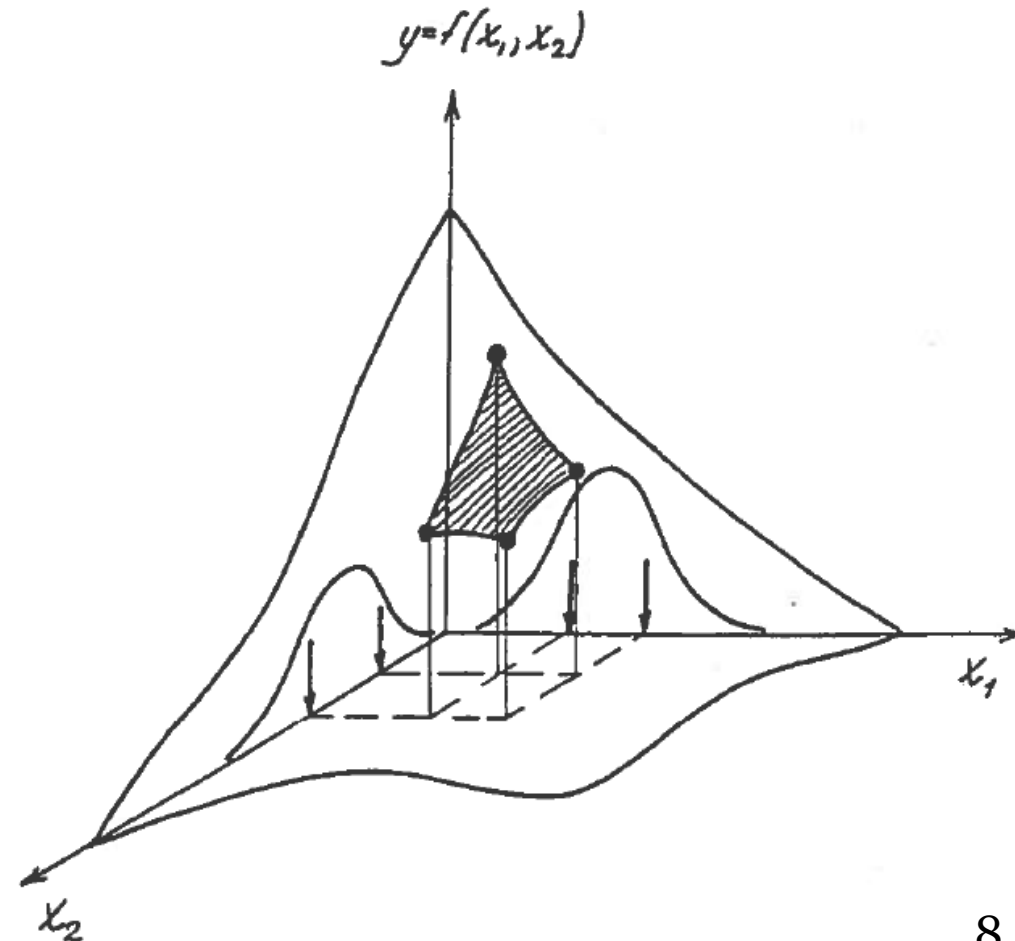
Monte Carlo simulering



Men först en liten repetition

Jämförelse

Punktskattningsmetoden (PEM)



- Medelvärde
- Standardavvikelse
- Skevhet
- Kurtosis (Toppighet)

1:a Centralmomentet

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

2:a Centralmomentet

$$V[x] = E[(x_i - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$$

3:e Centralmomentet

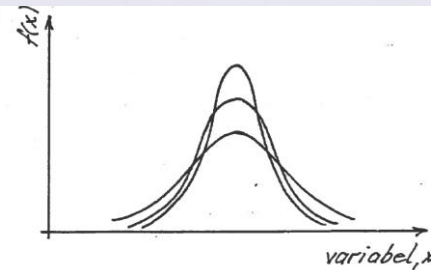
$$E[(x_i - \bar{x})^3] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / ((n-1)(n-2)/n)$$

$$\beta_1 = \frac{E[(x_i - \bar{x})^3]}{(\sigma[x])^3}$$

4:e Centralmomentet

$$E[(x_i - \bar{x})^4] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / ((n-1)(n-2)(n-3)/n(n+1))$$

$$\beta_2 = \frac{E[(x_i - \bar{x})^4]}{(\sigma[x])^4}$$



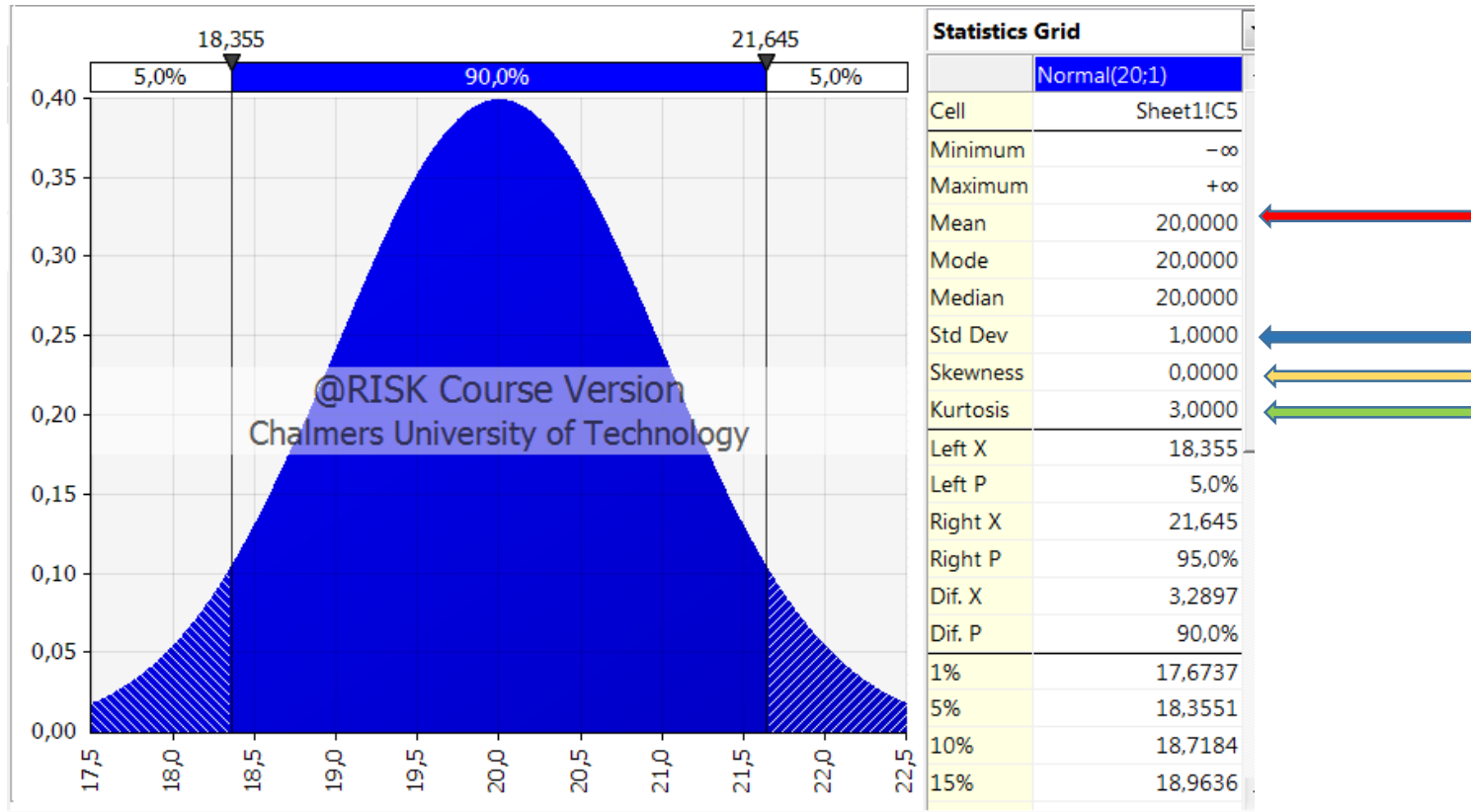
- Variationskoefficient

Variationskoefficient
$$Vip(x) = \sigma_x / \bar{x}$$

anges i %

- Normalfördelning ($E(x)$, $\sigma(x)$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 3$)

$N(20;1,0)$

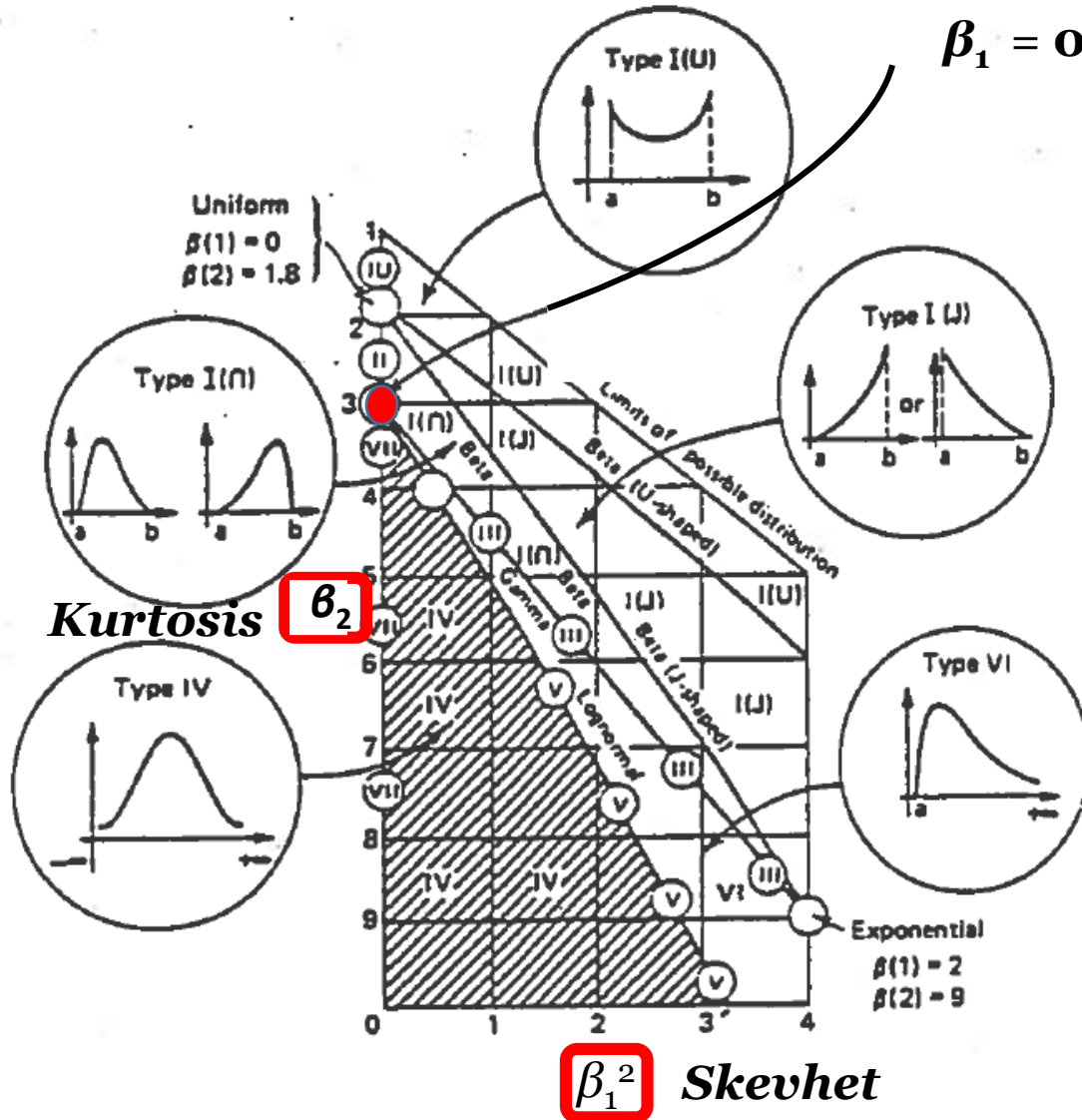


Normalfördelning

$\beta_1 = 0; \beta_2 = 3$

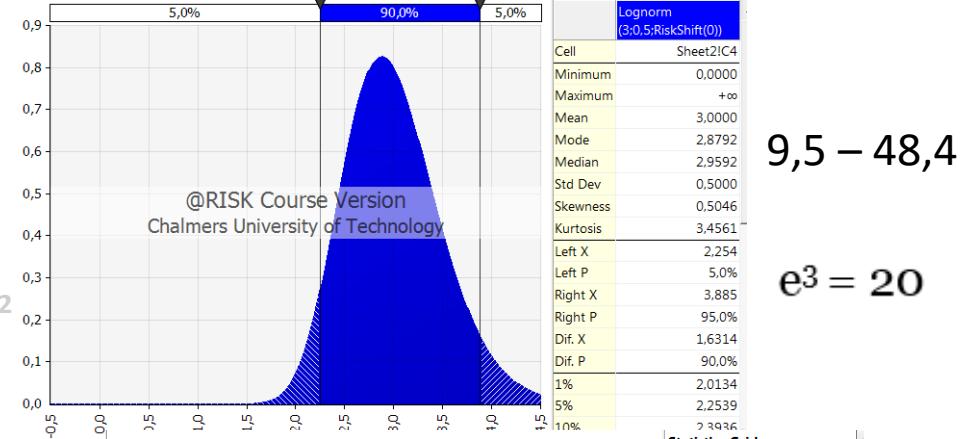
Sannolikhetsfördelningar
 Enligt Pearson

β - fördelning



Statistik för Geotekniker
 Repetition
 Fördelningar

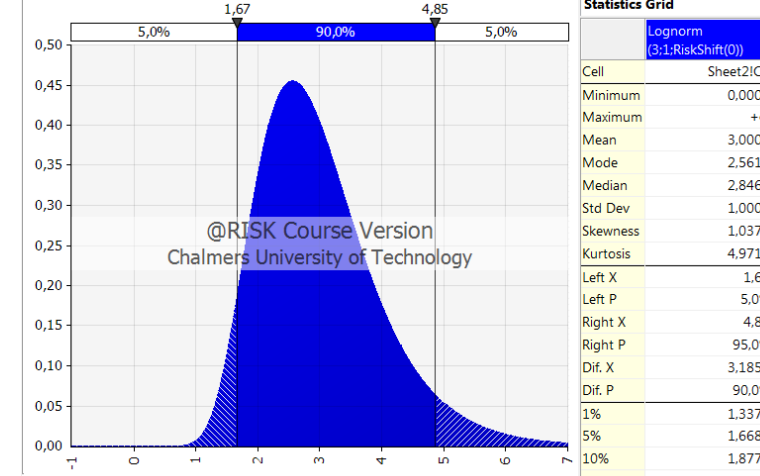
- Normalfördelning ($E(x)$, $\sigma(x)$, $\theta_1 = 0$, θ_2)
- Lognormalfördelning



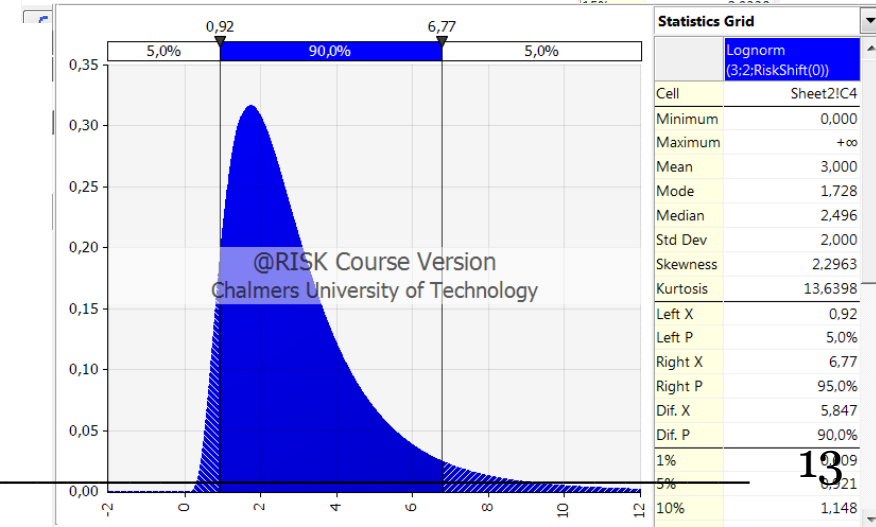
9,5 – 48,4

$e^3 = 20$

5,3 – 127,7

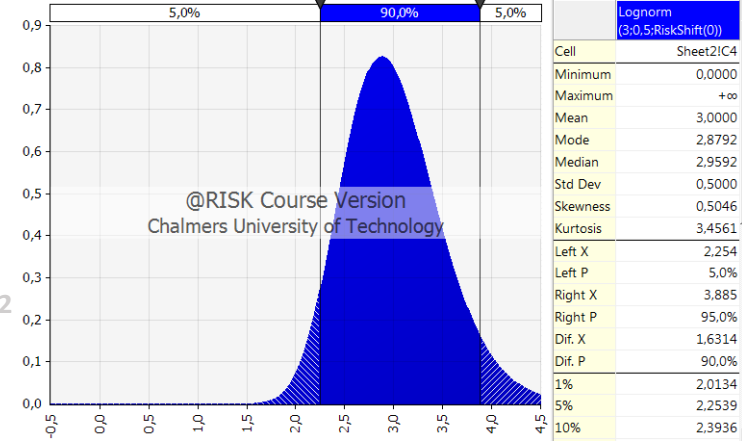
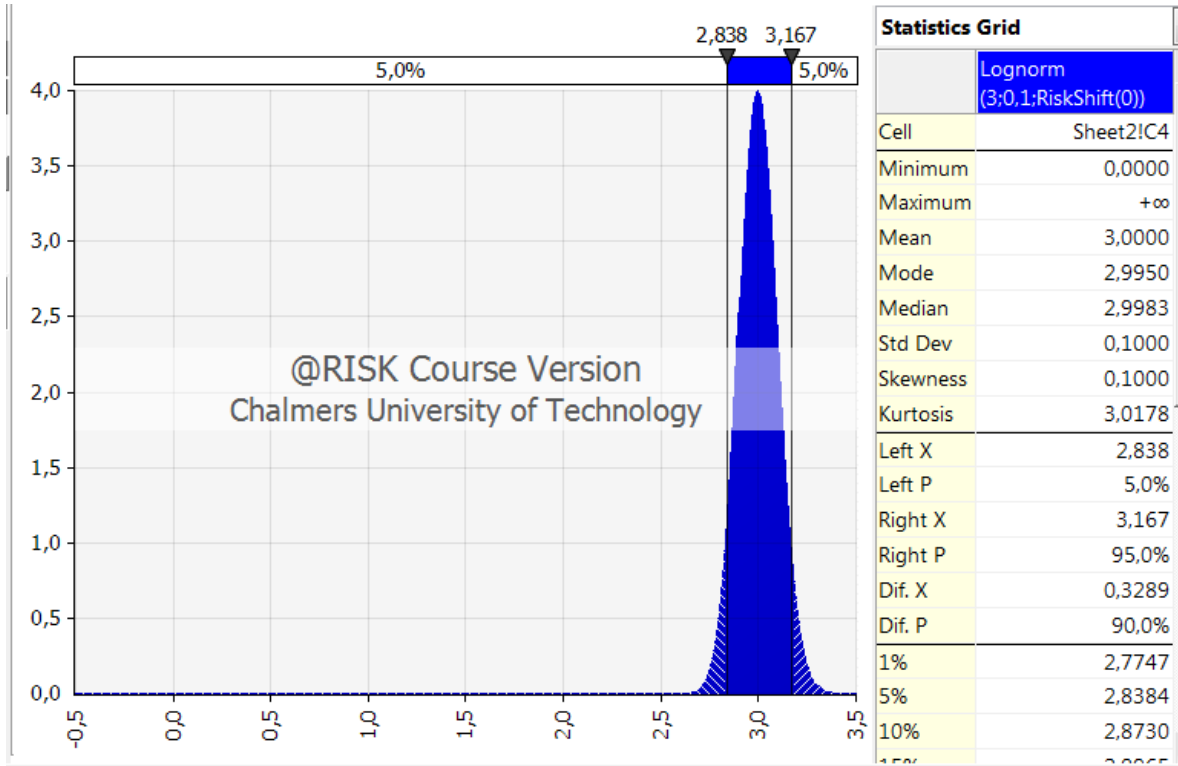


2,5 – 310

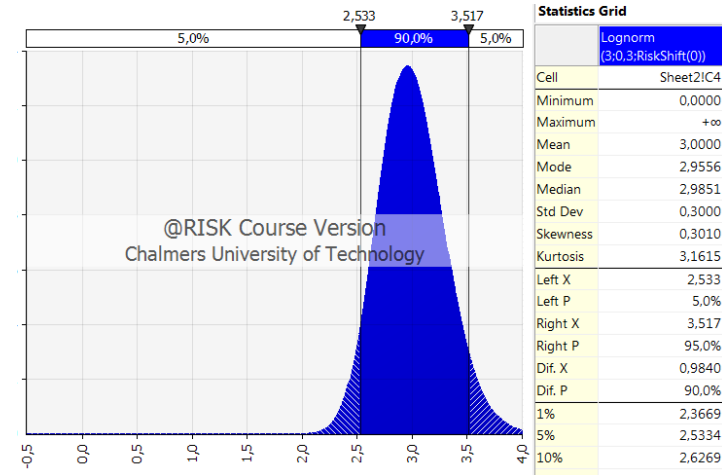


Statistik för Geotekniker
 Repetition
 Fördelningar

- Normalfördelning ($E(x)$, $\sigma(x)$, $\beta_1 = 0$, β_2)
- Lognormalfördelning



9,5 – 48,4



12,6 – 33,8

$$\beta_1 = 0,30$$

$$\beta_2 = 3,16$$

17,1 – 23,7

$$\beta_1 = 0,10$$

$$\beta_2 = 3,02$$

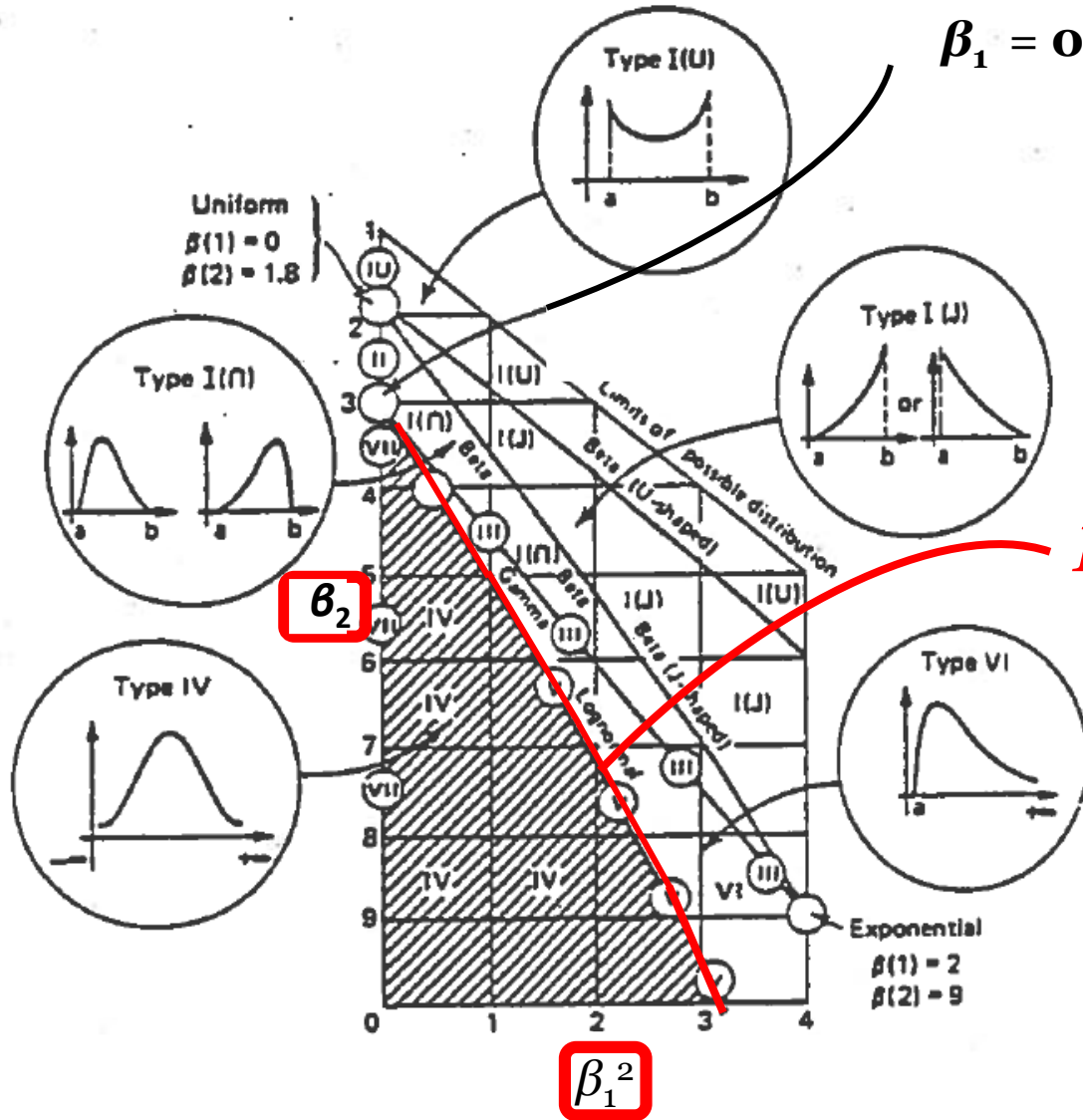
Normalfördelning

$$\beta_1 = 0; \beta_2 = 3$$

Sannolikhetsfördelningar
 Enligt Pearson

β - fördelning

Lognormalfördelning



3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

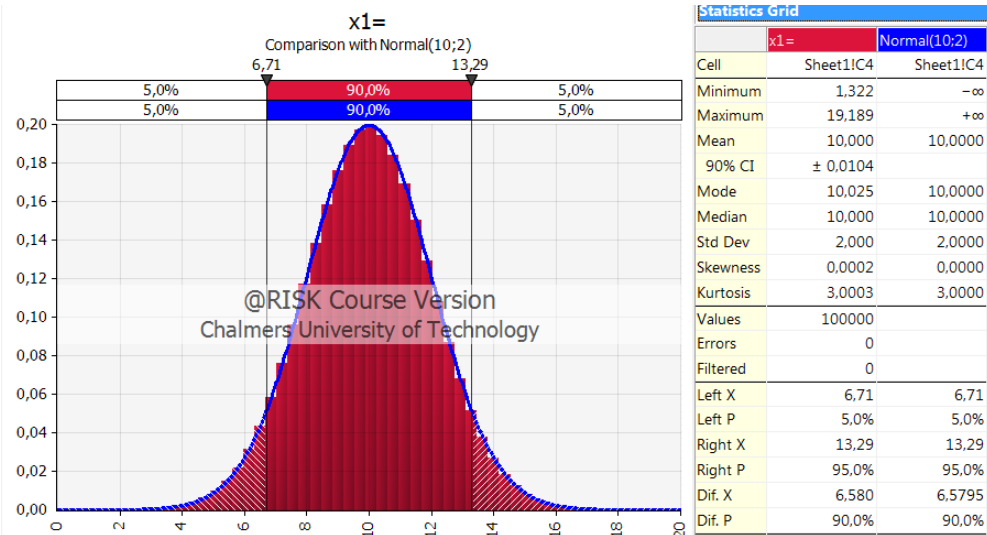
Vilken typ av fördelning är då:

$x_1 + x_2$

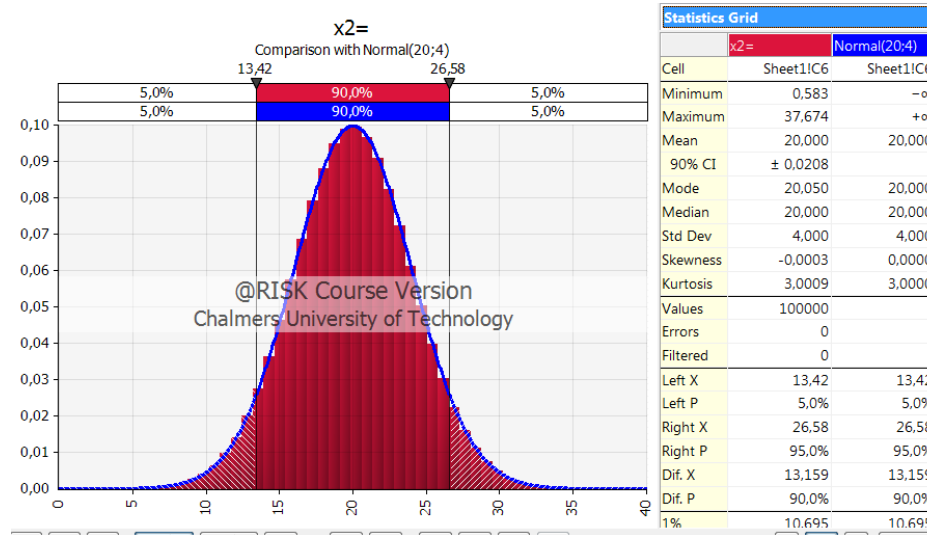
$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1

$X_1 = N(10;2)$



$X_2 = N(20;4)$



3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

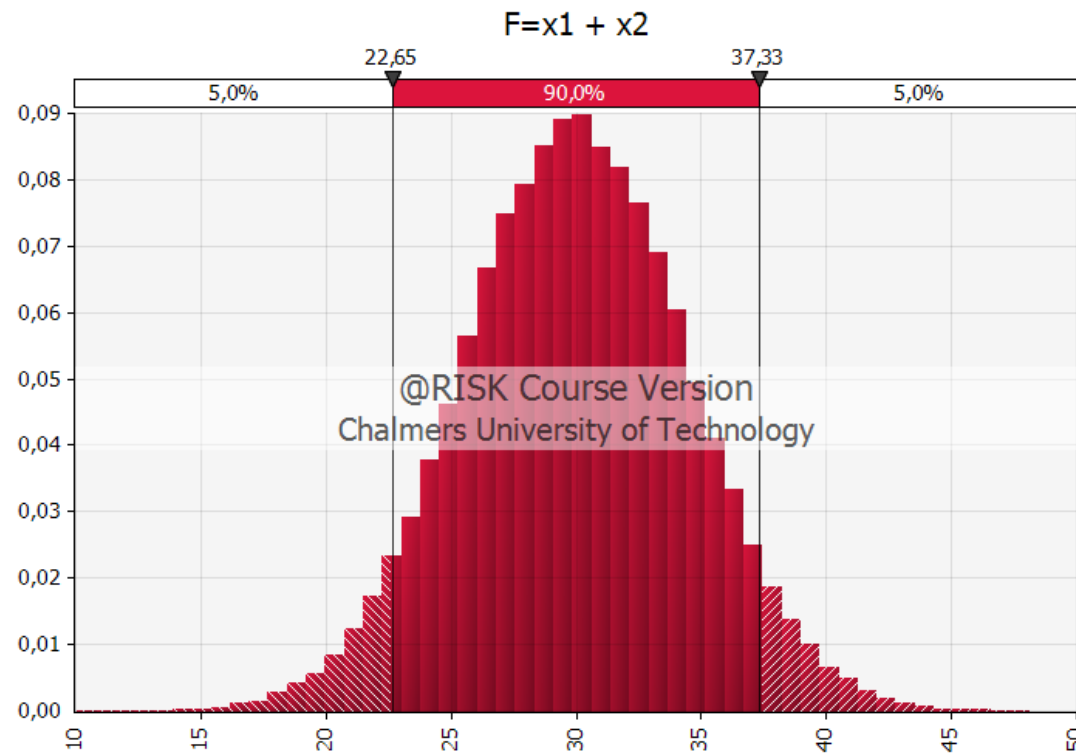
Vilken typ av fördelning är då:

$$Vip(x_1) = Vip(x_2) = 20 \%$$

$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1



Statistics Grid	
F=x1 + x2	
Cell	Sheet1!G4
Minimum	10,089
Maximum	48,117
Mean	30,000
90% CI	± 0,0232
Mode	30,052
Median	29,998
Std Dev	4,462
Skewness	-0,0006
Kurtosis	2,9983
Values	100000
Errors	0
Filtered	0
Left X	22,65
Left P	5,0%
Right X	37,33
Right P	95,0%
Dif. X	14,675
Dif. P	90,0%
1%	19,587



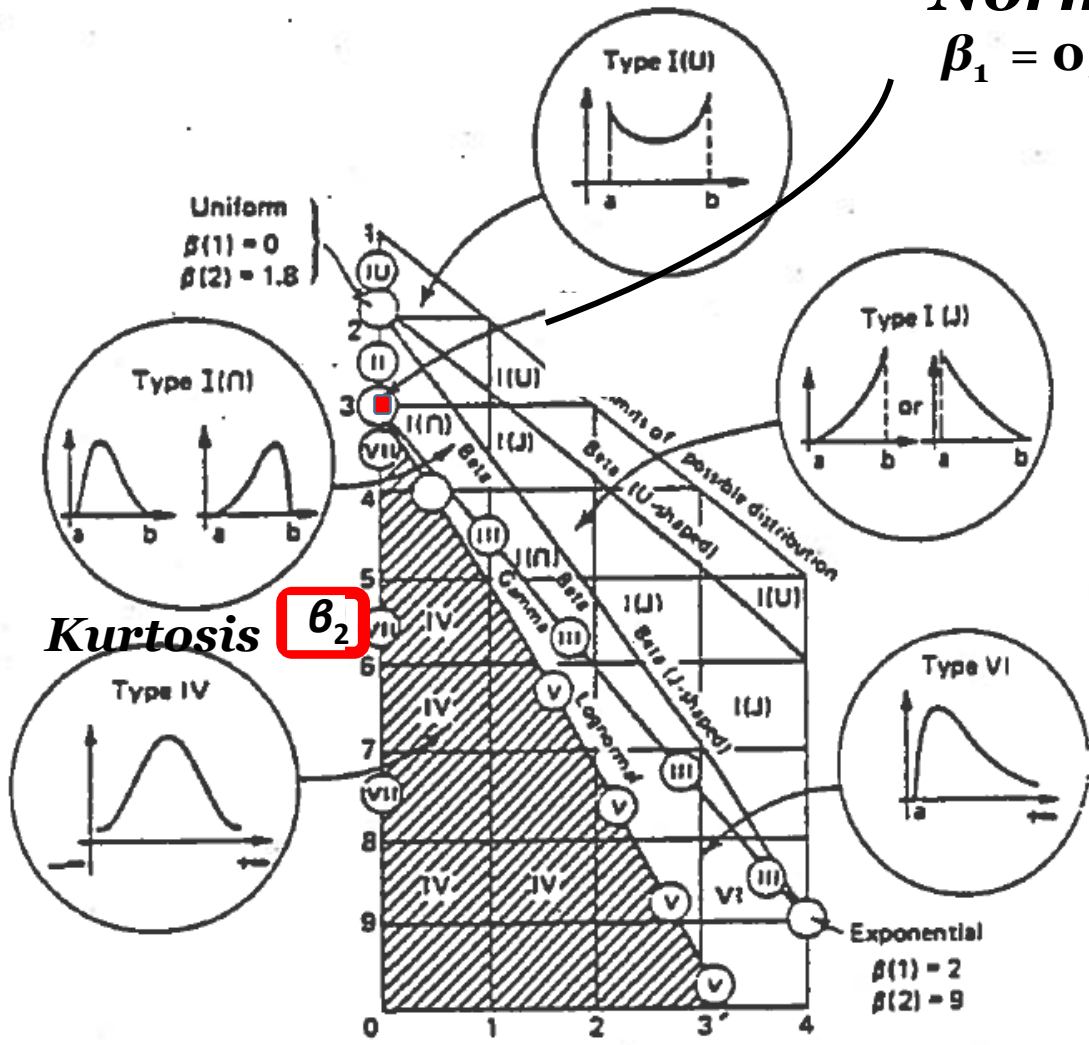
$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)^{0,5}$$

Normalfördelning

$$\beta_1 = 0; \beta_2 = 3$$

Sannolikhetsfördelningar
Enligt Pearson

β - fördelning



Skewness	-0.0006
Kurtosis	2.9983

3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

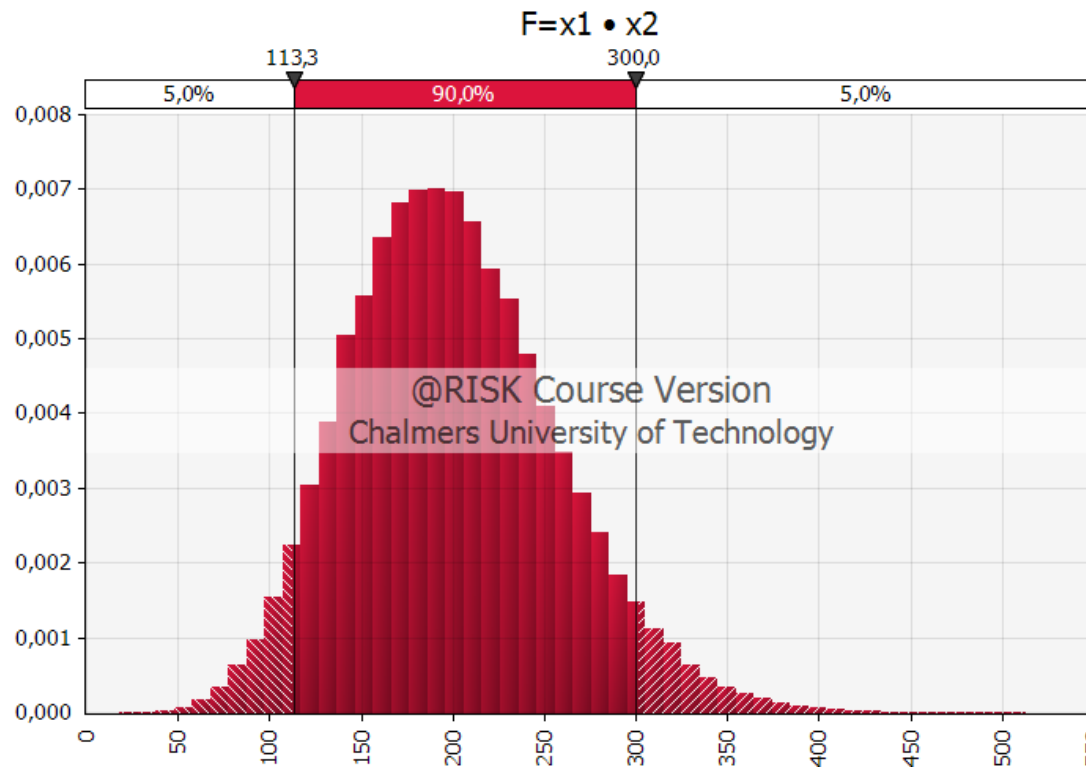
Vilken typ av fördelning är då:

$$Vip(x_1) = Vip(x_2) = 20 \%$$

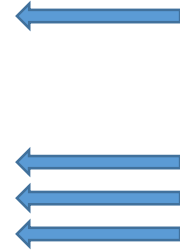
$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1



Statistics Grid	
F=x1 * x2	
Cell	Sheet1!G4
Minimum	18,21
Maximum	512,97
Mean	199,98
90% CI	± 0,297
Mode	192,54
Median	196,08
Std Dev	57,08
Skewness	0,4127
Kurtosis	3,2346
Values	100000
Errors	0
Filtered	0
Left X	113,3
Left P	5,0%
Right X	300,0
Right P	95,0%
Dif. X	186,68
Dif. P	90,0%

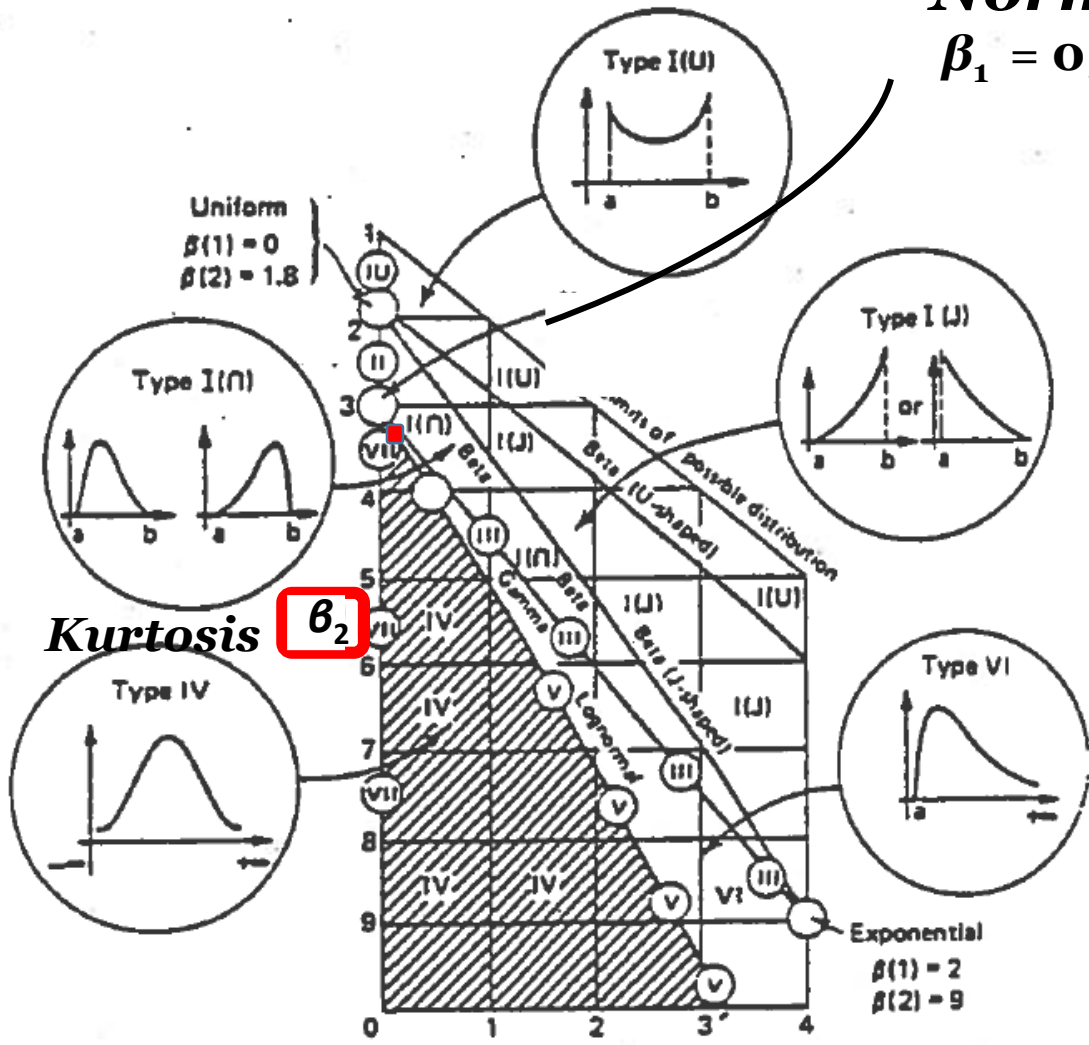


Normalfördelning

$$\beta_1 = 0; \beta_2 = 3$$

Sannolikhetsfördelningar
Enligt Pearson

β - fördelning



Kurtosis β_2

β_1^2 Skewhet

Skewness	0,4127
Kurtosis	3,2346

3. Släntstabilitet

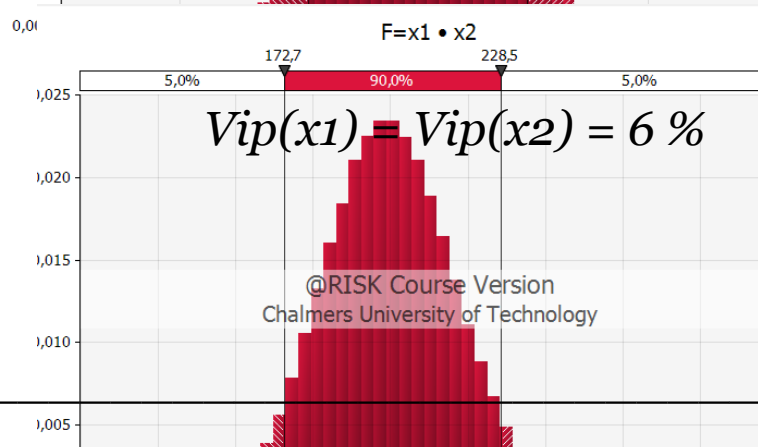
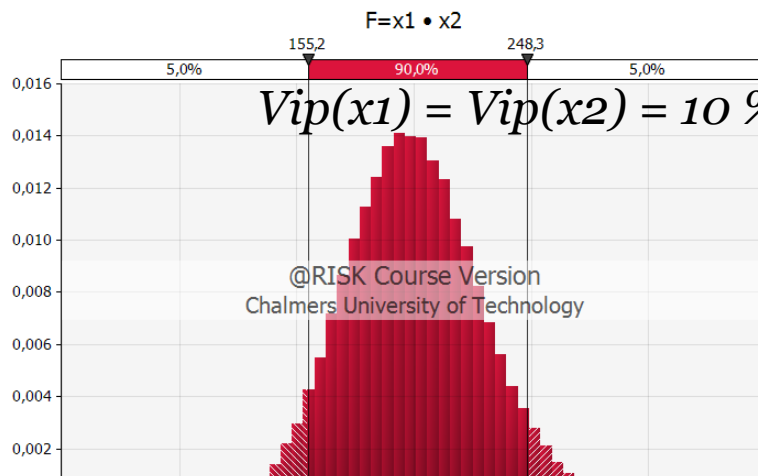
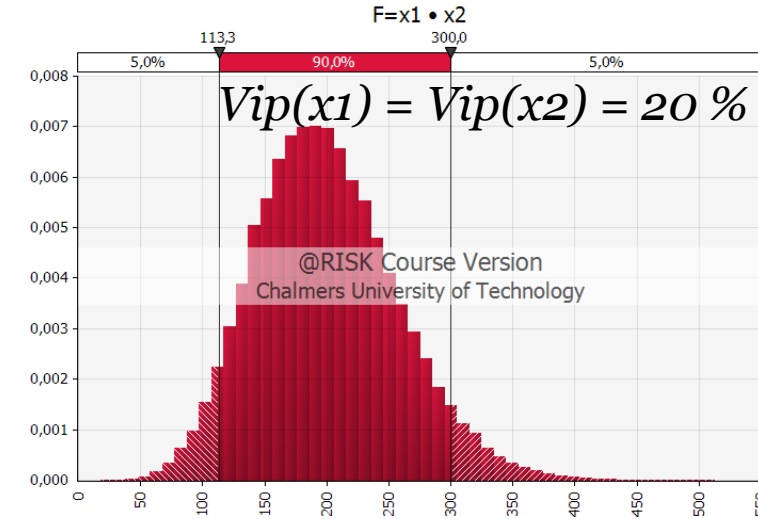
Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

Vilken typ av fördelning är då:

$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1



3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

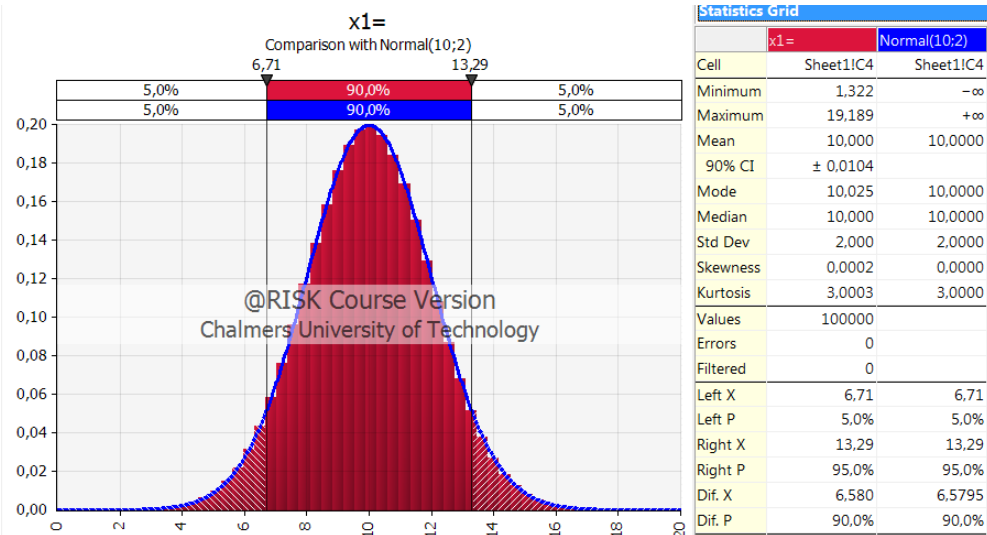
Vilken typ av fördelning är då:

$x_1 + x_2$

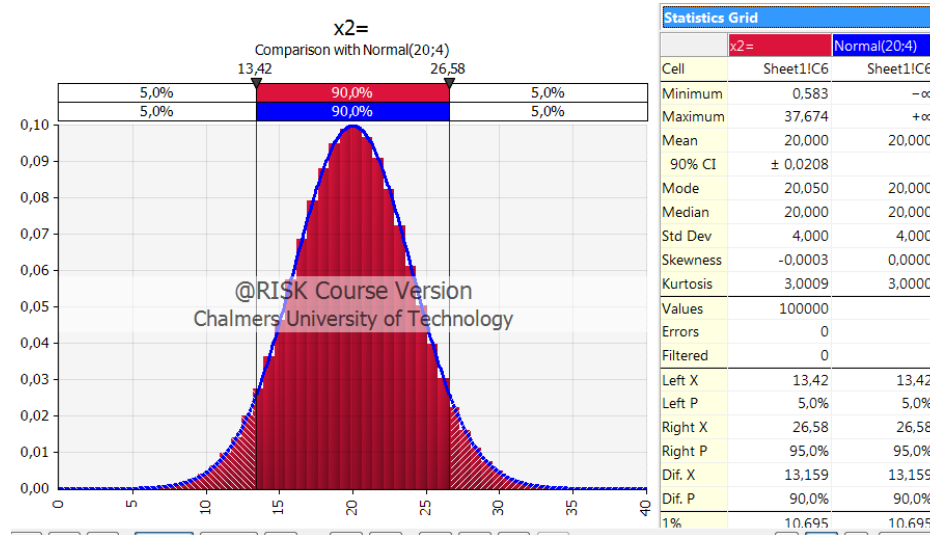
$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1

$X_1 = N(10;2)$



$X_2 = N(20;4)$



3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

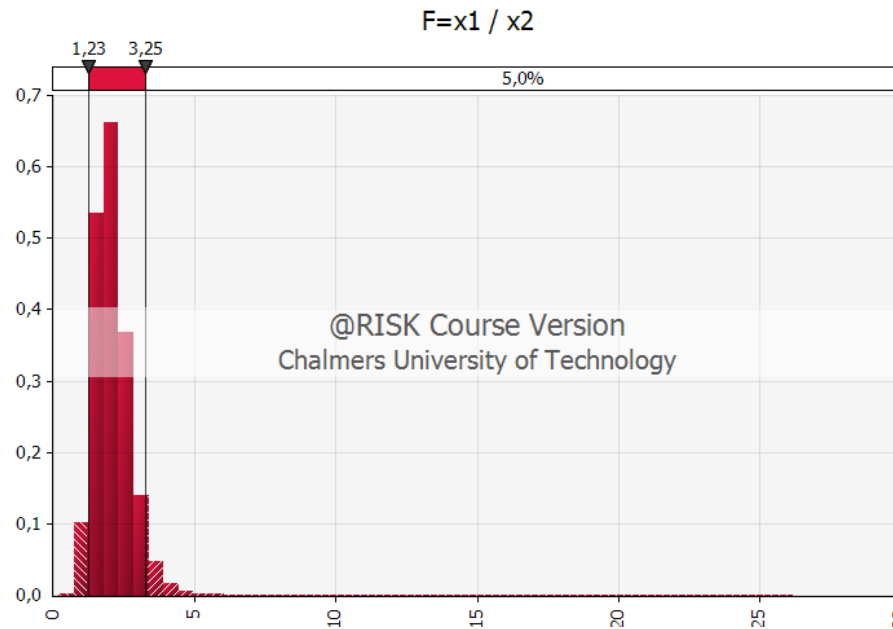
Vilken typ av fördelning är då:

$$Vip(x_1) = Vip(x_2) = 20 \%$$

$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1



Statistics Grid	
F=x1 / x2	
Cell	Sheet1!G4
Minimum	0,183
Maximum	26,216
Mean	2,093
90% CI	± 0,00346
Mode	1,966
Median	2,001
Std Dev	0,659
Skewness	1,8715
Kurtosis	26,9549
Values	98102
Errors	0
Filtered	0
Left X	1,23
Left P	5,0%
Right X	3,25
Right P	95,0%
Dif. X	2,026
Dif. P	90,0%



3. Släntstabilitet

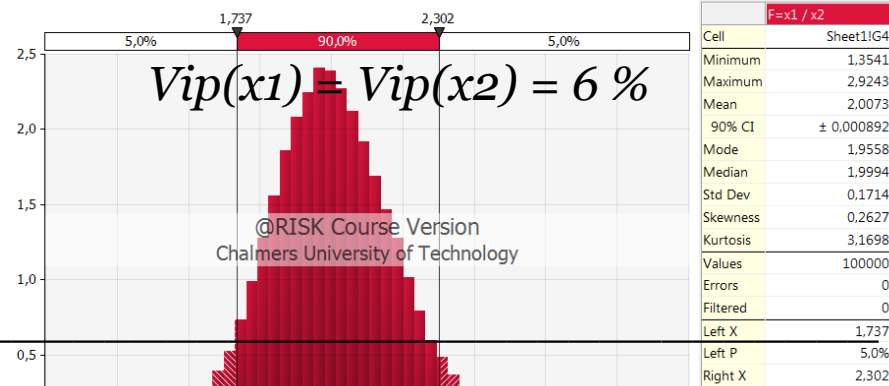
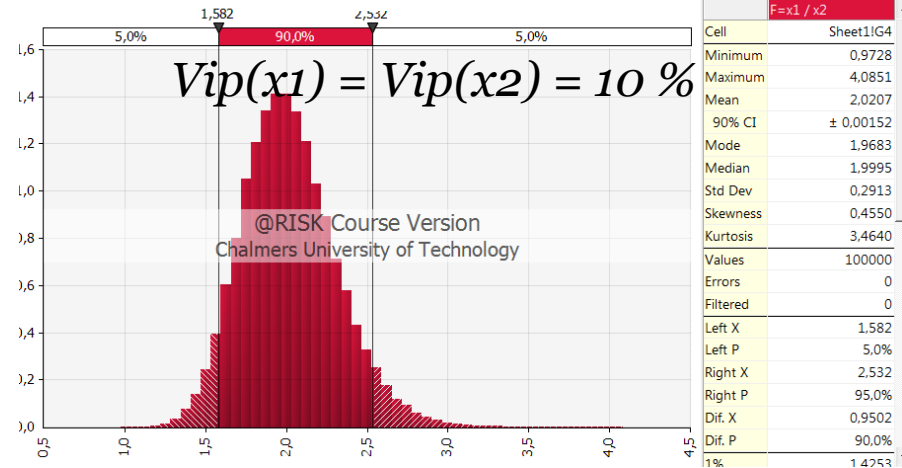
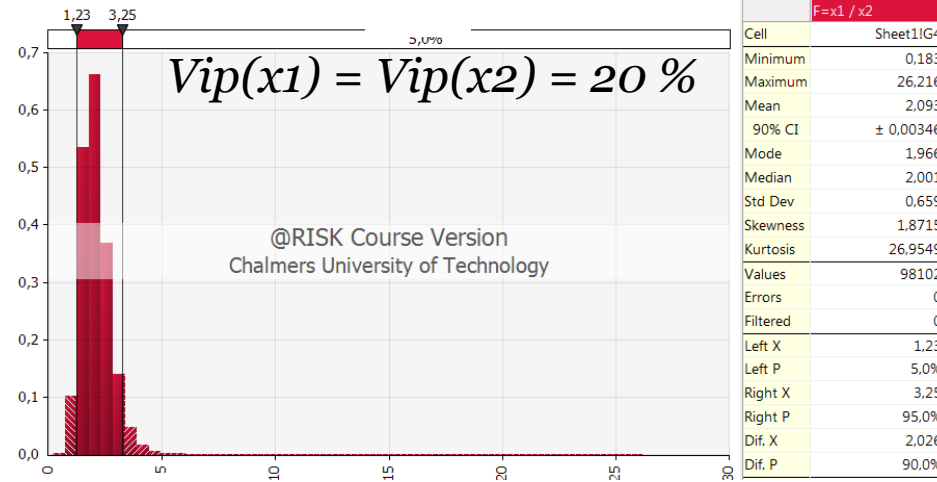
Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

Vilken typ av fördelning är då:

$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

x_2 / x_1



3. Släntstabilitet

Antag x_1 och x_2 Normalfördelade

Vilken typ av fördelning är då:

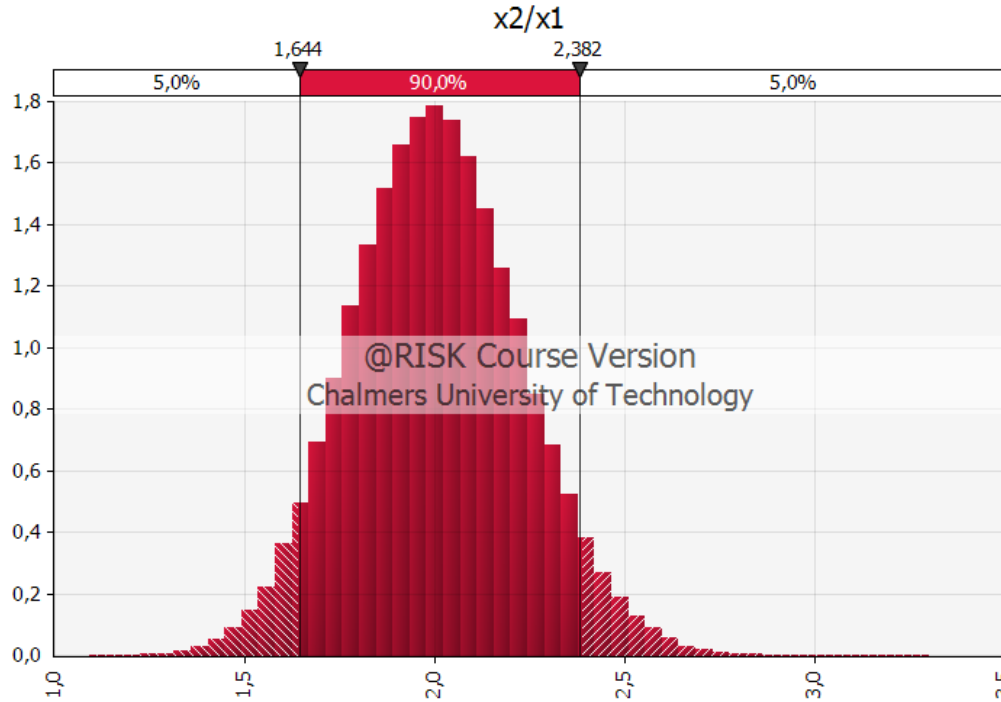
$$Vip(x_2) = 10 \%$$

$$Vip(x_1) = 5 \%$$

$x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$

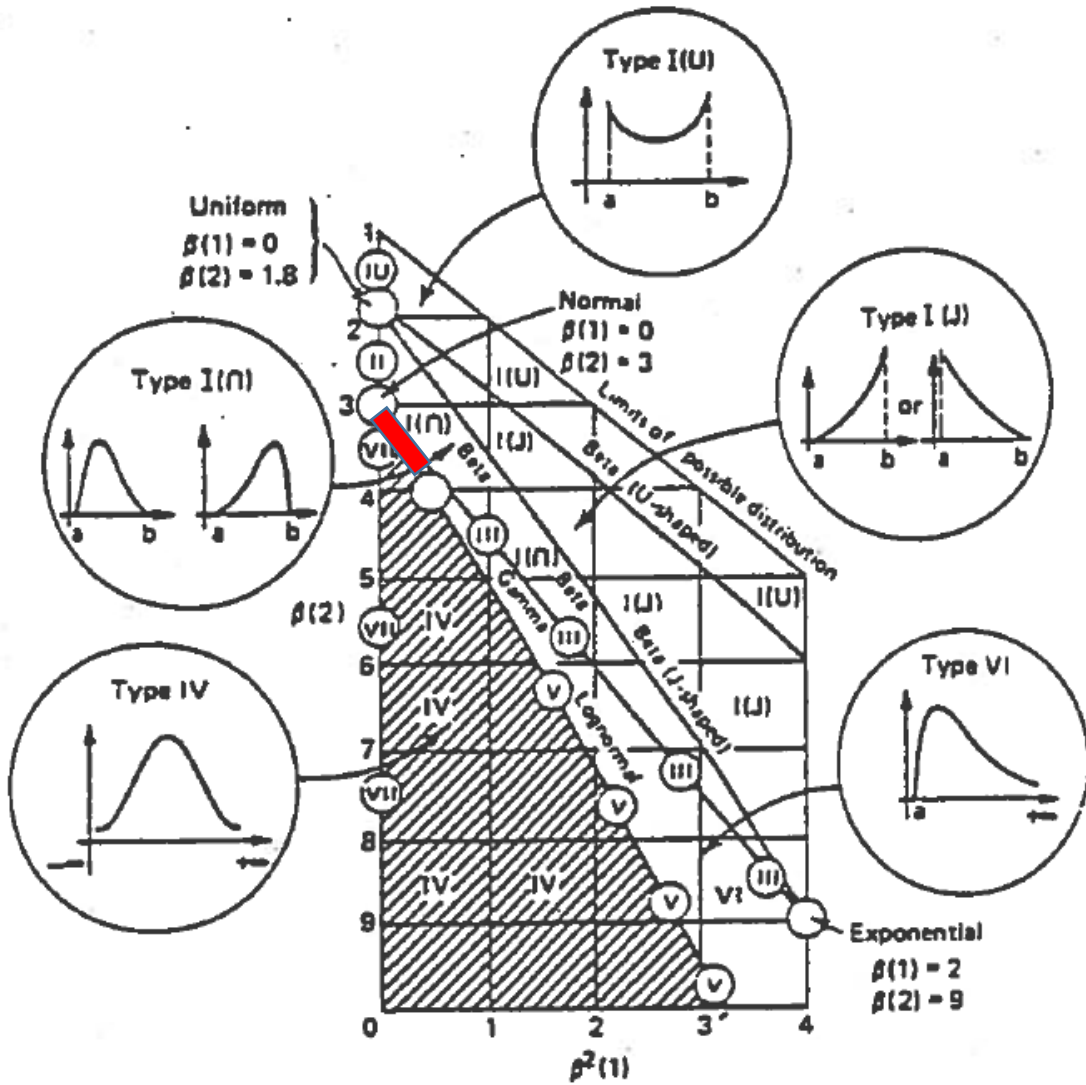
x_2 / x_1



Statistics Grid	
	x_2/x_1
Cell	Sheet1!G4
Minimum	1,0932
Maximum	3,3063
Mean	2,0050
90% CI	± 0,00117
Mode	1,9807
Median	2,0004
Std Dev	0,2248
Skewness	0,1295
Kurtosis	3,0425
Values	100000
Errors	0
Filtered	0
Left X	1,644
Left P	5,0%
Right X	2,382
Right P	95,0%
Dif. X	0,7385
Dif. P	90,0%

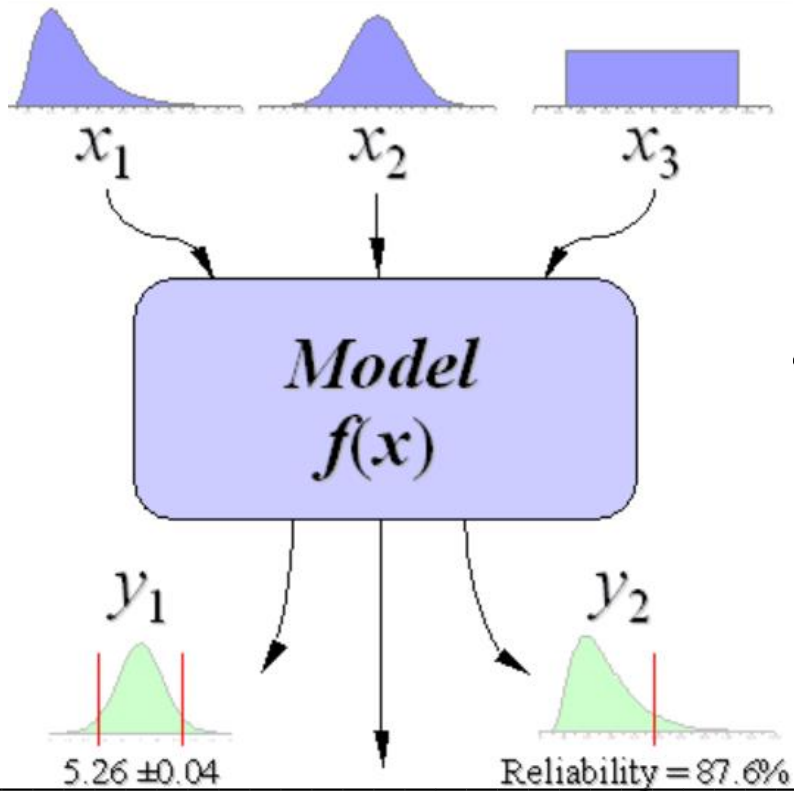


4. Simulering

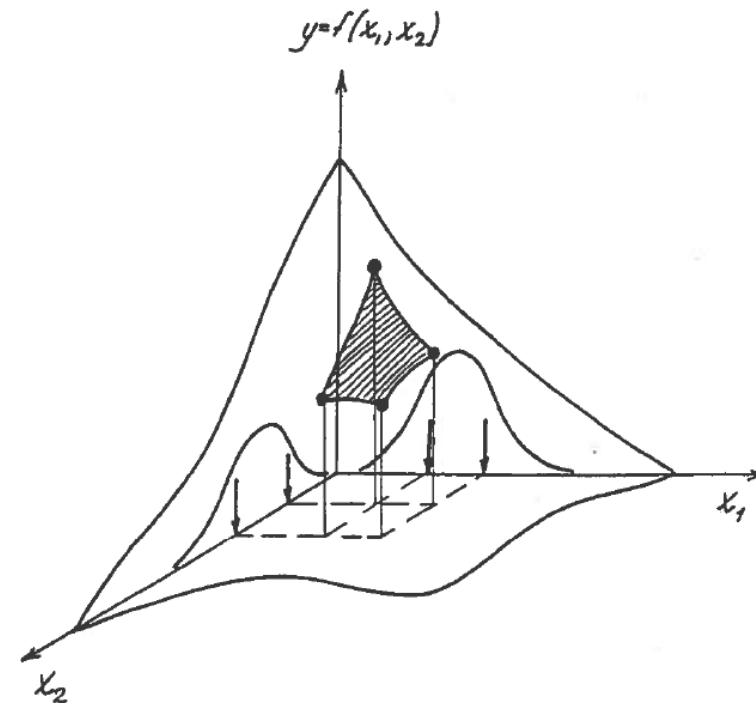


@Risk

Monte-Carlo simulering



- Punktskattningsmetoden, PEM

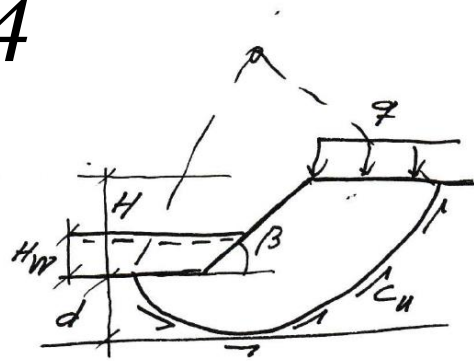


Jämförelse mellan

Monte Carlo Simulering - PEM

$$F = 1,24$$

$$F_c = N_c \frac{c_u}{\gamma H - \gamma_w H_w + q}$$



Bägge ger

$$\bar{F} = 1,23 \text{ à } 1,25$$

Vip

$N_o = 6$	2
$c_u = 20 \text{ kPa}$	4 - 10
$H = 7 \text{ m}$	3
$H_w = 1,5 \text{ m}$	-
$\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$	1

Jämförelse mellan

Monte Carlo Simulering - PEM

		P(brott i %)						
		Vip(c_u , %)	4	5	6	7	8	10
Monte Carlo	@Risk		0,04	0,10	0,3	0,7	1,3	3,5
PEM	Normal		0,04	0,15	0,42	0,90	1,6	3,8
PEM	Lognormal		0,012	0,06	0,19	0,49	1,0	2,8

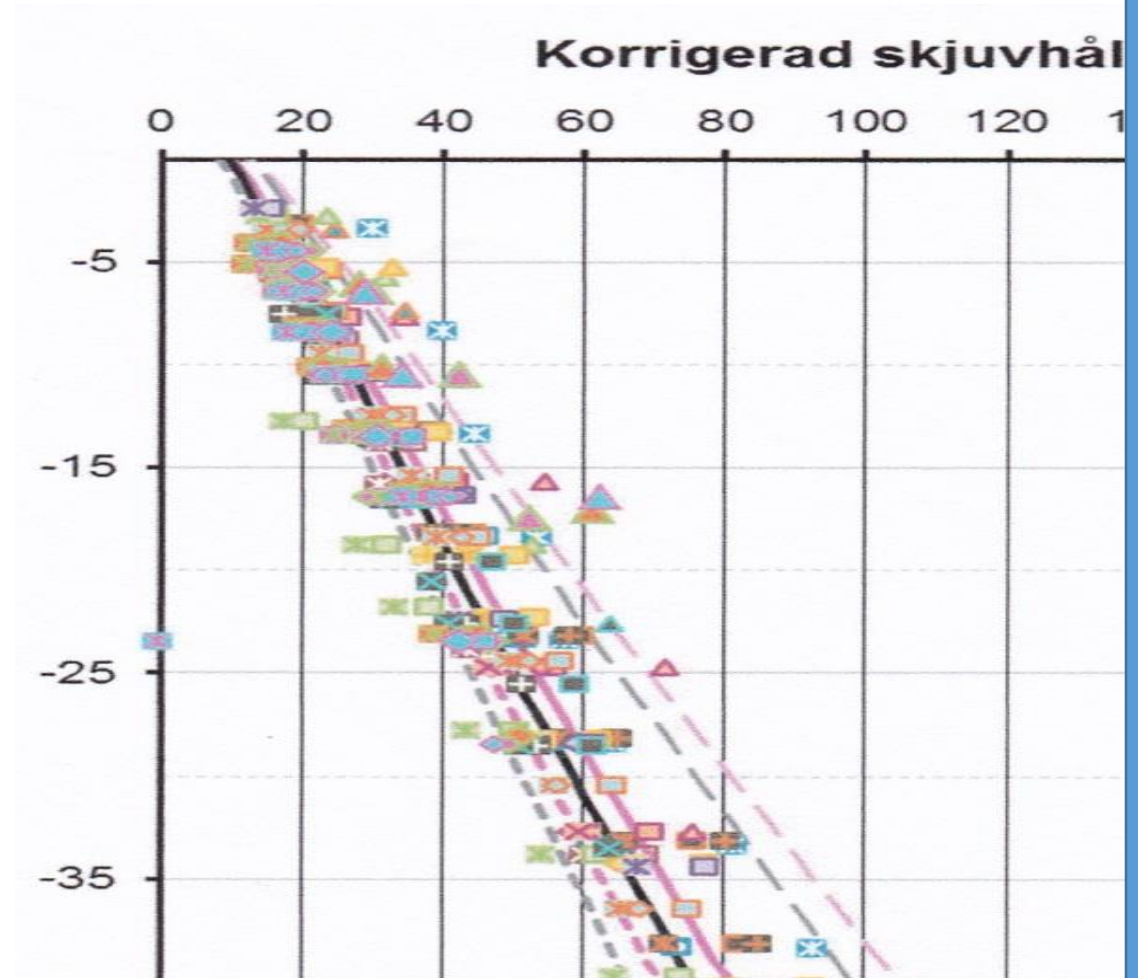
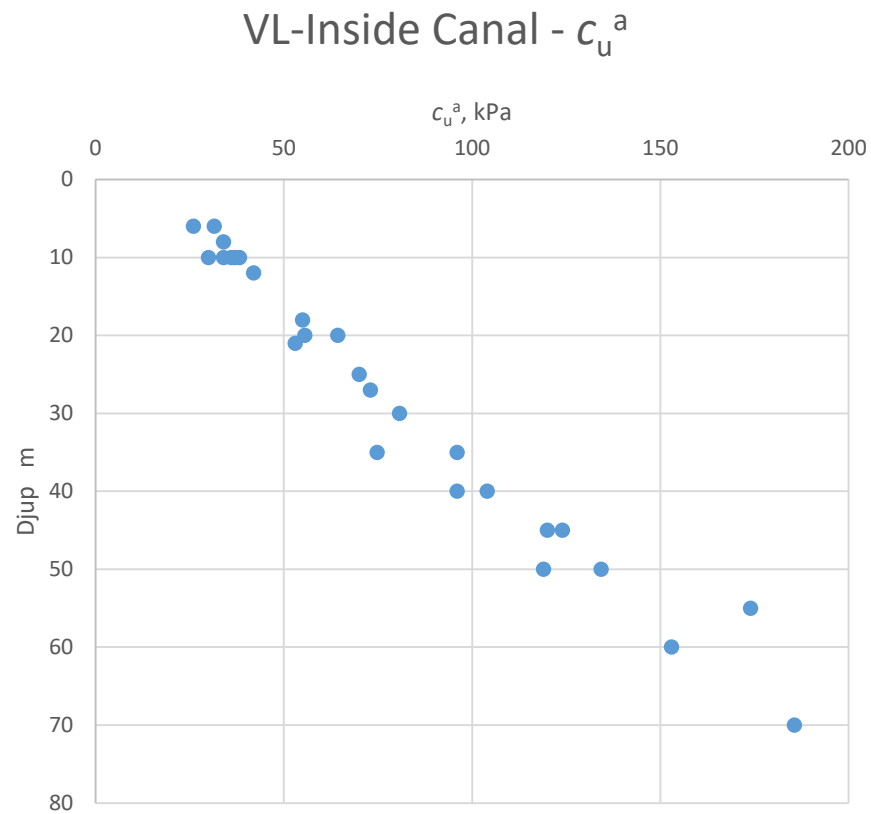
OBS! P(brott) i %

Vad är då

Variationskoefficienten ?

Hur ser det ut i våra undersökningar?

$$Vip(c_u^{vinge}) = 15 \text{ à } 20 \%$$



- Exempel på uppmätta Vip (c_u^a c_u^{DS} c_u^p)

Karlatornet:

$$c_u^a = 8 + 2,65 z$$

Std.dev 2,9 kPa
Vip(cu) 3,3 %

$$c_u^{DS} = 7 + 1,7 z$$

Std.dev 2,2 kPa
Vip(cu) 3,7 %

$$s'c = 36 + 7,9 z$$

Std.dev 19,4 kPa
Vip(cu) 10,1 %

Lilla Bommen:

$$c_u^a = 18 + 2,7 z$$

Std.dev 4,6 kPa
Vip(cu) 5,3 %

$$s'c = 36 + 7,6 z$$

Std.dev 7,81 kPa
Vip(s'c) 4,40%

Storvreta
(Uppsala)

$$c_u^{DS} = 9 + 1,9 z$$

Std.dev 2,4 kPa
Vip(cu) 8,9 %

Inside Canal(Gbg)

$$c_u^a = 11,5 + 2,37 z$$

Std.dev 4,9 kPa
Vip(cu) 7,8 %

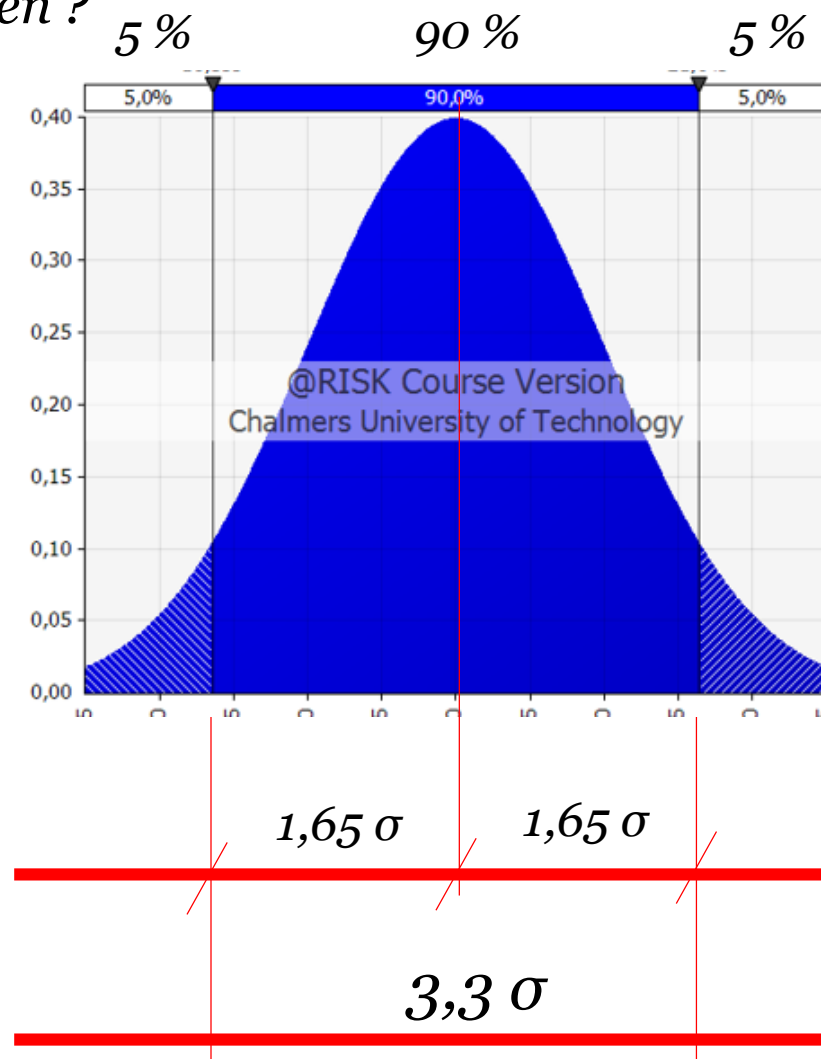
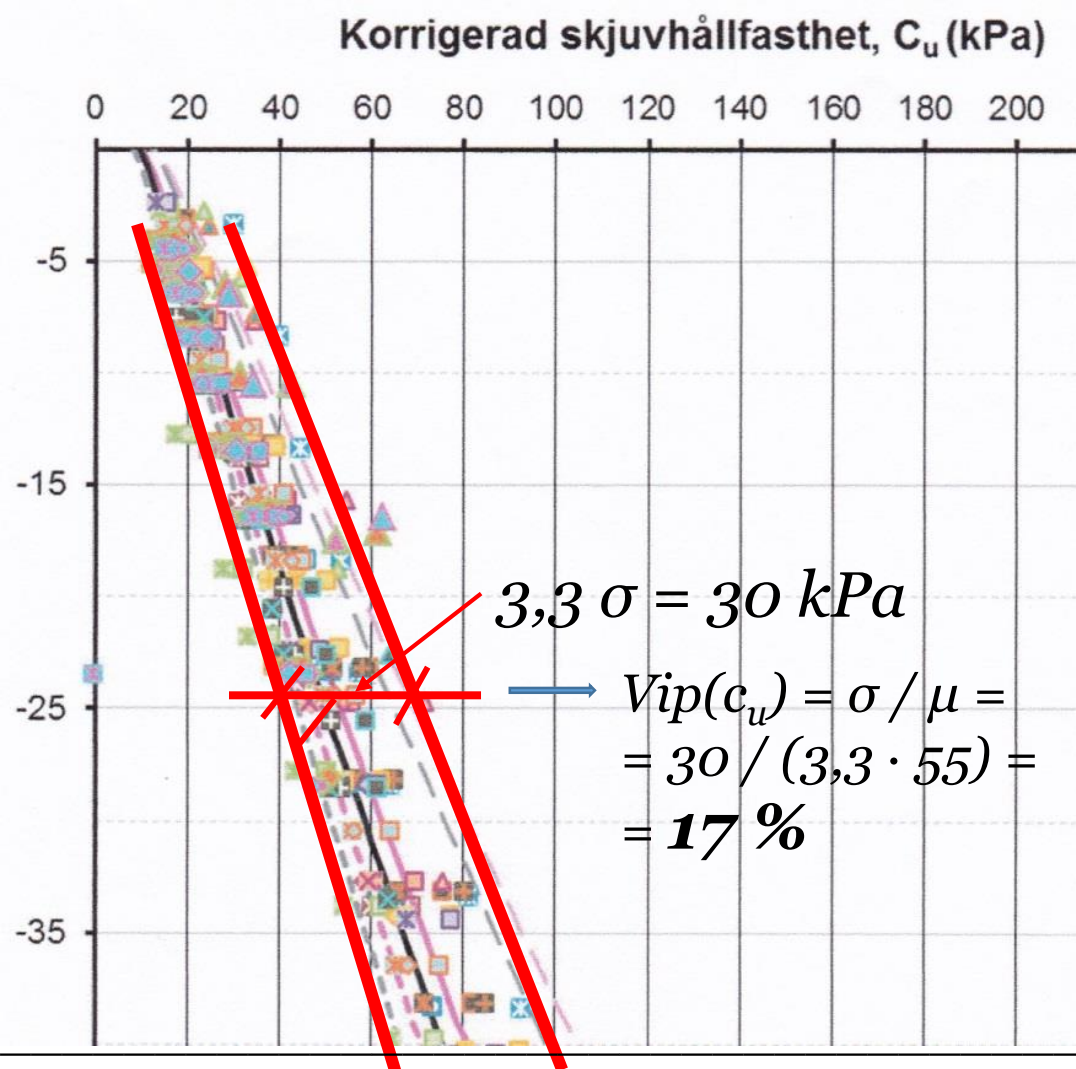
$$c_u^{DS} = 6,3 + 1,76 z$$

Std.dev 6,2 kPa
Vip(cu) 8,4 %

$$s'c_{CRS} = 31 + 8,7 z$$

Std.dev 24,8 kPa
Vip(cu) 8,6 %

Hur kan jag bestämma
Variationskoefficienten ?

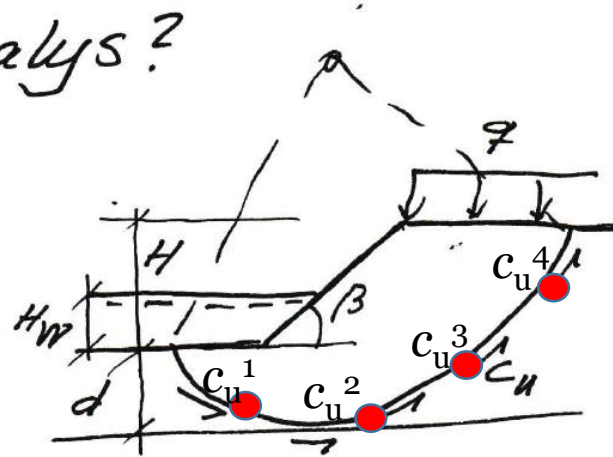


Inverkan av

Variansreduktion

Vilka parametrar dominerar F i en stabilitetsanalys?

$$F_c = N_c \frac{c_u}{\gamma H - \gamma_w H_w + q}$$



Korrelationsmatris

1	1	1	1	1	0,75	0,5	0,25	1	0	0	0
1	1	1	1	0,75	1	0,75	0,5	0	1	0	0
1	1	1	1	0,5	0,75	1	0,75	0	0	1	0
1	1	1	1	0,25	0,5	0,75	1	0	0	0	1
							

- Variansreduktion, $F = 1,24$

	1	2	3	4	5	6	7	Vip(cu), %
P(brott)	1,20E-04	2,90E-03	8,70E-03	1,45E-02	2,13E-02	2,88E-02	3,70E-02	12
$\beta =$	3,68	2,76	2,38	2,18	2,03	1,9	1,79	
Vip(F)	6	8	9,2	10	10,7	11,4	12,10	
P(brott)	4,80E-06	4,30E-04	2,00E-03	4,10E-03	7,00E-03	1,06E-02	1,48E-02	10
$\beta =$	4,43	3,33	2,87	2,64	2,46	2,3	2,17	
Vip(F)	5	6,6	7,7	8,3	8,9	9,5	10,00	
P(brott)	1,40E-08	1,40E-05	1,50E-04	4,40E-04	1,00E-03	1,90E-03	3,00E-03	8
$\beta =$	5,55	4,18	3,61	3,32	3,09	2,9	2,74	
Vip(F)	4	5,3	6,1	6,6	7,1	7,6	8,00	
P(brott)	1,10E-10	8,40E-07	1,70E-05	7,00E-05	1,95E-04	4,34E-04	8,20E-04	7
$\beta =$	6,35	4,79	4,14	3,81	3,55	3,34	3,15	
Vip(F)	3,5	4,6	5,4	5,8	6,2	6,6	7,00	
P(brott)	6,00E-14	1,10E-08	6,00E-07	4,20E-06	2,00E-05	5,00E-05	1,10E-04	6
$\beta =$	7,42	5,6	4,84	4,46	4,15	3,9	3,69	
Vip(F)	3	4	4,6	5	5,3	5,7	6,00	

1 0 0 0
 0 1 0 0
 0 0 1 0
 0 0 0 1

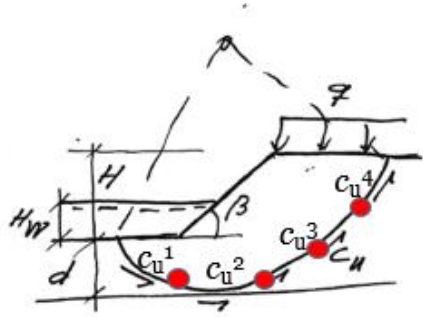
• • • • •

1 0,75 0,5 0,25
 0,75 1 0,75 0,5
 0,5 0,75 1 0,75
 0,25 0,5 0,75 1

1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1

1 0 0 0
 0 1 0 0
 0 0 1 0
 0 0 0 1

1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1



Vip(cu) = 12 %

1,24	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$
1,37	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$
1,5	$1,3 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Vip(cu) = 10 %

1,24	$4,8 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
1,37	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$
1,5	$5,6 \cdot 10^{-16}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$

Vip(cu) = 8 %

1,24	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-3}$
1,37	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
1,5	$5,2 \cdot 10^{-24}$	$3 \cdot 10^{-7}$

Vip(cu) = 6 %

1,24	$1,2 \cdot 10^{-14}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
1,37	$3 \cdot 10^{-26}$	$7,7 \cdot 10^{-8}$
1,5	$3 \cdot 10^{-41}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$

Krav: $P(\text{brott}) < 1 \cdot 10^{-6}$

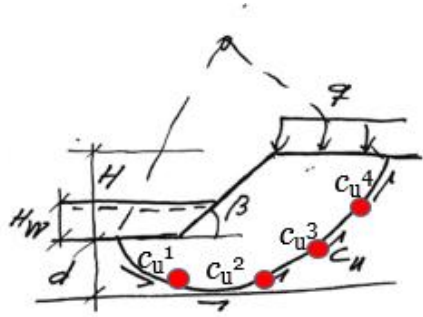
Krav $F_c > 1,5$

$F_{komb} > 1,35$

?

1 0 0 0
 0 1 0 0
 0 0 1 0
 0 0 0 1

1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1
 1 1 1 1



Vip(cu) = 12 %

1,24	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$
1,37	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$
1,5	$1,3 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Vip(cu) = 10 %

1,24	$4,8 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
1,37	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$9,3 \cdot 10^{-4}$
1,5	$5,6 \cdot 10^{-16}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$

Vip(cu) = 8 %

1,24	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-3}$
1,37	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
1,5	$5,2 \cdot 10^{-24}$	$3 \cdot 10^{-7}$

Vip(cu) = 6 %

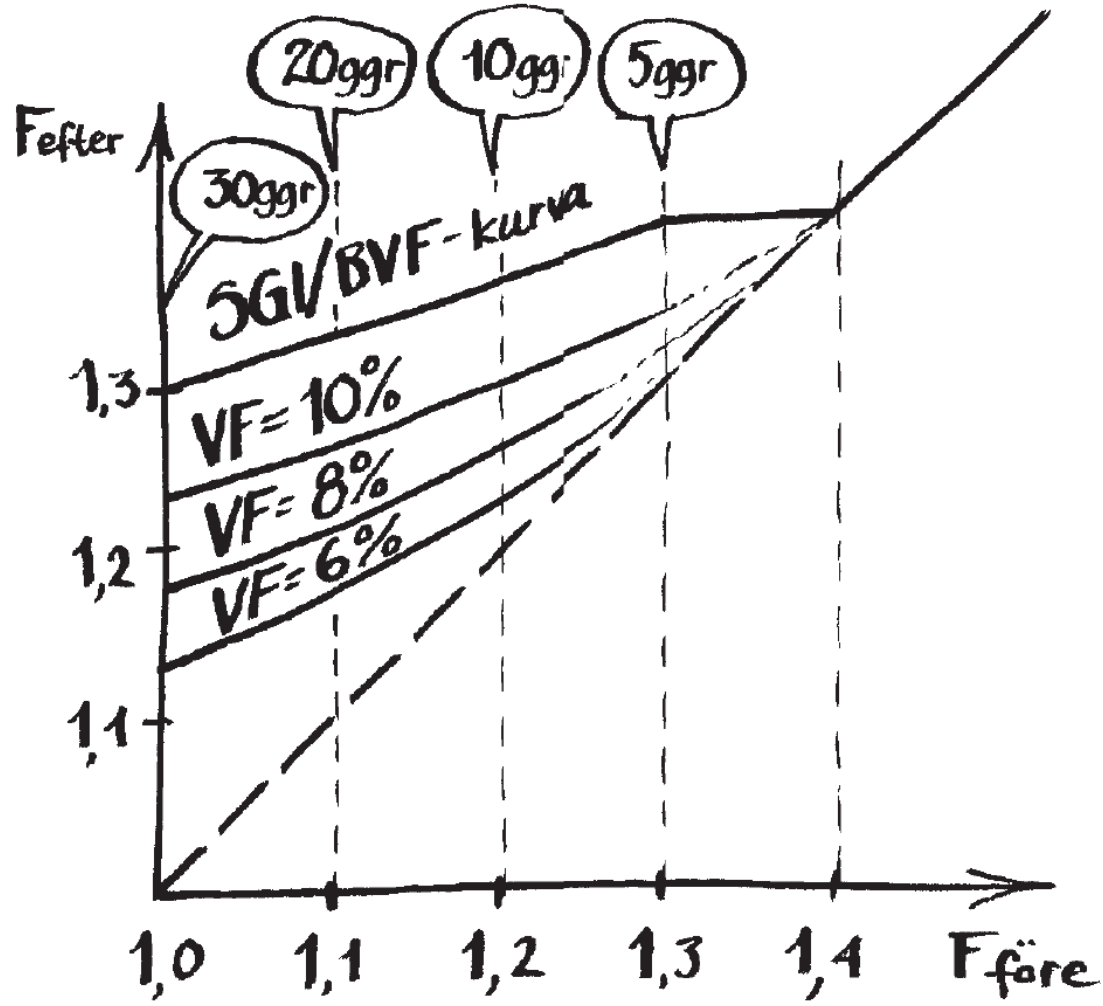
1,24	$1,2 \cdot 10^{-14}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
1,37	$3 \cdot 10^{-26}$	$7,7 \cdot 10^{-8}$
1,5	$3 \cdot 10^{-41}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$

Krav: $P(\text{brott}) < 1 \cdot 10^{-6}$

Krav $F_c > 1,5$

$F_{komb} > 1,35$

?



- *Simulera*
 - Monte Carlo*
 - PEM*
- *Variationskoefficient*
- *Variansreduktion*
- F_c och F_{komb} eller $P(\text{brott})$